

CONTROL 1
Miércoles 14 de Abril de 1999

Problema 1

Justo cuando pensaba que sus conocimientos sólo serían útiles para organizaciones con fines de lucro, alguien que sabe que usted es alumno del curso de optimización en la Universidad de Chile le pide ayuda para enfrentar un problema planteándole lo siguiente:

“Pertenezco a una organización de ayuda social que desea construir un hogar para gente de escasos recursos en una cierta comuna de la VIII región. Para ello contamos con dos lugares posibles H1 y H2, pero tan sólo podemos construir un hogar.

Construir un hogar en H1 tendría un costo de h_1 obteniéndose una capacidad de atención de c_1 personas/período; mientras que en H2, el costo ascendería a h_2 , con una capacidad de atención de c_2 personas/período. Además en H1 se tiene la opción de ampliar a un costo de h_3 la capacidad del hogar en dc_1 personas/período.

Para esta iniciativa se cuenta con un capital igual a K que debe cubrir además los costos variables de mantención, alimentación y otros que ascienden a m_1 por cada persona atendida en un período en H1; y m_2 , por cada persona atendida en H2.

Por otro lado, los distintos lugares H1 y H2 tendrían distintas capacidades de atracción (o demandas) que están dadas por a_{1t} y a_{2t} personas/período, respectivamente.

Además, se conocen los períodos en los cuales la capacidad c_1 será excedida por la demanda a_{1t} , lo cual se denota por el conjunto de períodos (o índices) I_1 . Similarmente se definen I_2 e I_{d1} . En otras palabras:

$$\begin{aligned} I_1 &: \{ t \text{ tal que } a_{1t} > c_1 \} \\ I_2 &: \{ t \text{ tal que } a_{2t} > c_2 \} \\ I_{d1} &: \{ t \text{ tal que } a_{1t} > c_1 + dc_1 \}. \end{aligned}$$

En definitiva, mi organización desea construir este hogar en el lugar y de la manera en que la mayor cantidad de personas sea atendida en un horizonte de T períodos.”

Para poner sus conocimientos en práctica por una buena causa plantee un modelo lineal entero capaz de representar este problema.

Problema 2

Sea el problema:

$$\text{Max } (x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{sa.: } x_1 \leq 1$$

$$x_1 \geq -1$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_2 \geq 0$$

a) Resuelva geoméricamente el problema. Verifique el cumplimiento de las condiciones de Kuhn–Tucker en el óptimo.

b) Verifique si para los puntos $(x_1=0; x_2=+1)$ y $(x_1=0; x_2=0)$ se cumplen las condiciones de Kuhn-Tucker.

¿Existen direcciones factibles para estos 2 puntos en los cuales mejore el valor de la función objetivo?. Explique brevemente.

Sea el problema

$$\text{Max } (x_1, x_2) = x_2$$

$$\text{sa.: } x_1^2 + x_2^2 \leq 4$$

$$x_1^2 + x_2^2 \geq 1$$

c) Verifique si para $x_1=0$ $x_2=-1$ se cumplen las condiciones de Kuhn–Tucker.

¿Existen direcciones factibles en las cuales mejore el valor de la función objetivo?. Explique brevemente.

Problema 3

a) Justifique o rechace la siguiente afirmación:

“Un modelo matemático debe tener la mayor fidelidad representativa posible”.

b) Describa brevemente en qué consiste la validación de un modelo matemático. ¿Qué curso de acción debe tomarse si un modelo no cumple la validación?.

c) Justifique la denominación de “método” para los procedimientos de optimización llamados método del gradiente y método de Newton.

d) Indique una ventaja y una desventaja del método de Newton frente al método del gradiente.

e) Señale bajo qué condiciones un óptimo de un problema de programación no lineal no cumple las condiciones de Kuhn-Tucker.

f) Suponga un punto que cumple las condiciones de Kuhn-Tucker. ¿Puede afirmarse que es un óptimo?. Analice las posibles situaciones.

Problema 4

Una empresa química fabrica N tipos de aditivos líquidos, cada tipo de aditivo se fabrica mezclando j componentes líquidos básicos, donde por cada litro de aditivo i fabricado se emplean c_{ij} litros de componente j .

La empresa posee K plantas productoras que funcionan con distintas tecnologías, esto significa que los costos de producción (sin incluir los costos de los componentes) para cada producto son distintos en cada planta, donde CF_{ik} es el costo de fabricar un litro de producto i en la planta k y TF_{ik} es el tiempo en horas que se mantiene ocupada la planta k fabricando un litro de producto i (una planta no puede fabricar dos productos distintos simultáneamente).

El costo de los componentes básicos varía según la planta, siendo $CB_{j,k}$ el costo de un litro de componente j puesto en la planta k .

El proceso productivo genera L tipos de contaminantes. Por cada litro de aditivo i fabricado en la planta k se producen $CO_{i,k,l}$ litros de contaminante l ($l=1..L$).

La empresa está sujeta a regulaciones ambientales mediante las cuales en un lapso de 24 horas la empresa no puede verter más de CM_l litros de contaminante l al ambiente.

Adicionalmente, se tiene que por cada litro de aditivo 1 (uno) fabricado la empresa debe producir dos litros de aditivo 3. Además se tiene que por cada litro de aditivo 2 fabricado la empresa debe producir dos litros de aditivo 5.

Plantee un PPL que permita satisfacer una demanda de D_i litros de aditivo i en un lapso de 24 horas a mínimo costo considerando que no existe ningún stock inicial de aditivos.

P1)

Punto Modelo Lineal Entero.

①

a) Variables de Decisión

$$x_1 = \begin{cases} 1 & \text{si construyo hogar en } L_1 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$x_2 = \begin{cases} 1 & \text{si construyo hogar en } L_2 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

$$x_3 = \begin{cases} 1 & \text{si amplió el hogar construido en } L_1 \\ 0 & \sim \end{cases}$$

Sea I = conjunto de todos los índices t de las periodos: $\{1, 2, 3, \dots, T\}$.

b) Restricciones:

i) $x_1 + x_2 = 1 \quad \Leftrightarrow$ Se construye un sólo hogar

ii) $x_3 \leq x_1 \quad \Leftrightarrow$ El hogar se puede ampliar sólo si se construye en L_1 .

iii) Restricción de Capital:

$$x_1 H_1 + x_2 H_2 + x_3 H_3 + \dots \quad \left(\text{Costo de Construcción} \right)$$

$$\dots m_2 x_2 \left(\sum_{t \in I_2} c_2 + \sum_{t \in I - I_2} a_{2t} \right) + \dots \quad \left(\text{Costo de Mantenimiento del hogar en } L_2 \right)$$

dato por el costo unitario por persona o periodo multiplicado por la cantidad de personas que ocupan el hogar.

$$\dots m_1 \left[x_1 \left(\sum_{t \in I_1} c_1 + \sum_{t \in I - I_1} a_{1t} \right) + \dots \right]$$

(Costo de mantenimiento del hogar en L_1 sin ampliación)

$$\dots x_3 \left(\sum_{t \in I_1 \cap (I - I_{d,1})} (a_{1t} - c_1) + \sum_{t \in I_1 \cap I_{d,1}} d_{c,1} \right) \leq K$$

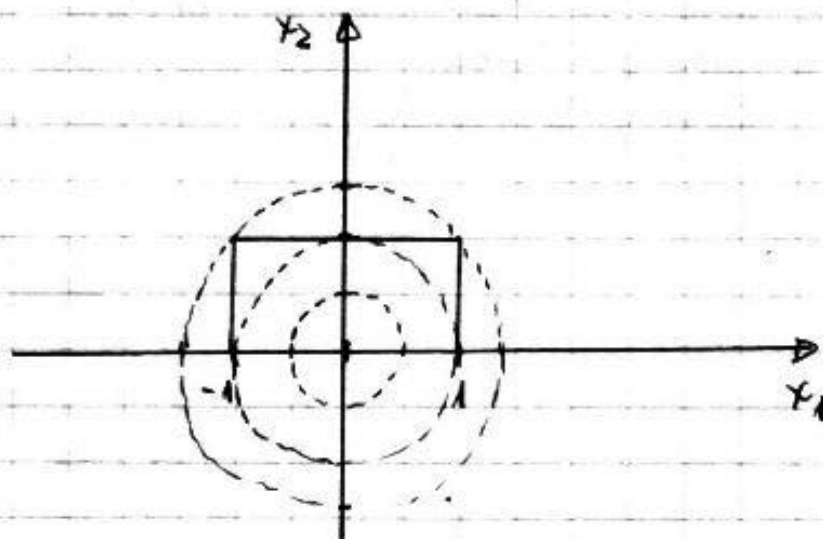
Efecto ampliación.

$$I_2 = \{t \in I; a_{2t} > c_2\}$$

21
 c) Función Objetivo: maximizar cantidad de personas alojadas. (2)

$$\begin{aligned} \text{Max}_{x_1, x_2, x_3} \left\{ \right. & x_1 \left(\sum_{t \in I_1} c_1 + \sum_{t \in I - I_1} a_{1t} \right) \\ & + x_2 \left(\sum_{t \in I_2} c_2 + \sum_{t \in I - I_2} a_{2t} \right) \\ & + x_3 \left(\sum_{t \in I_1 \cap I_2} dc_1 + \sum_{t \in I_1 \cap (I - I_2)} (a_{1t} - c_1) \right) \left. \right\} \end{aligned}$$

e) P2)



Solución óptima: $x_1 = +1$ $x_2 = 1$
 $x_1 = -1$ $x_2 = 1$

Condiciones de Karlin-Tucker:

$$\begin{aligned} i) \quad & x_1^* & -1 & \leq 0 \\ & -x_1^* & -1 & \leq 0 \\ & x_2^* & -1 & \leq 0 \\ & -x_2^* & & \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \quad & \mu_1 (x_1^* - 1) = 0 \\ & \mu_2 (-x_1^* - 1) = 0 \\ & \mu_3 (x_2^* - 1) = 0 \\ & \mu_4 (-x_2^*) = 0. \end{aligned}$$

$$iii) \quad \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

El punto $x_1 = 1$ $x_2 = 1$ cumple K-T con $\mu_1 = 2$
 $\mu_3 = 2$ y $\mu_2 = \mu_4 = 0$.

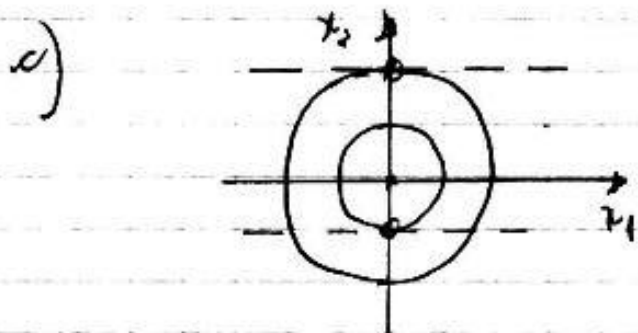
El punto $x_1 = -1$ $x_2 = 1$ cumple K-T con $\mu_2 = 2$
 $\mu_3 = 2$ y $\mu_1 = \mu_4 = 0$.

b) El punto $x_1 = 0$ $x_2 = +1$ cumple Kuhn-Tucker con $\mu_1 = +2$ $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$.

Este punto no es un óptimo local ya que existen direcciones factibles que mejoran la función objetivo. Si me muevo sobre la recta $x_2 = 1$ en la dirección de $x_1 = 0$ $x_2 = +1$ se mejora la función objetivo.

(P2) 2

El punto $x_1=0$ $x_2=0$. cumple K-T con $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4=0$.
 No es un óptimo local. Todo el semi-círculo factible a partir de $x_1=0$ $x_2=0$ contiene las direcciones factibles que mejoran la función objetivo.



$$a) \quad \begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - 4 &\leq 0 \\ -x_1^2 - x_2^2 + 1 &\leq 0 \end{aligned}$$

$$i) \quad \begin{aligned} \mu_1 (x_1^2 + x_2^2 - 4) &= 0 \\ \mu_2 (-x_1^2 - x_2^2 + 1) &= 0. \end{aligned}$$

$$ii) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu_1 \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix} -2x_1 \\ -2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$x_1=0$ $x_2=-1$ cumple las condiciones de K-T
 con $\mu_1=0$ $\mu_2=1/2$.

No existen direcciones factibles que mejoren la función objetivo. Es un óptimo local.

El óptimo global es $x_1=0$ $x_2=2$.

- a) Se rechaza la afirmación.
La mayor ~~comp~~ fidelidad representativa implica una gran complejidad del modelo. Esto atenta contra una solución medible y visible.
- b) La validación consiste en verificar que el modelo matemático construido representa adecuadamente el problema por resolver.
La validación se puede hacer con datos históricos. En este caso el modelo debe representar la situación del sistema en la época histórica de los datos.
También la validación puede hacerse mediante modificaciones sustanciales de uno o más parámetros, cuyo resultado en la solución es perfectamente predecible.
Si el modelo no cumple la validación debe volverse a la etapa de modelamiento y luego a la resolución nuevamente para volver a validar finalmente.
- c) En ambos casos no hay seguridad de encontrar el óptimo en un número finito de pasos.
- d) Ventaja del método de Newton frente al gradiente es su mejor convergencia.
La desventaja más importante del método de Newton es que dependiendo del punto de partida y la función a optimizar este procedimiento puede alejarse del óptimo y no encontrarlo. Esto nunca ocurre con el método del gradiente.
- e) Si el óptimo no es regular no cumplirá Kuhn-Tucker.
- f) Si un punto cumple Kuhn-Tucker no puede afirmarse que sea óptimo local o global. Las condiciones son solo necesarias.

Por tanto el punto puede ser un óptimo o puede ser este punto no óptimo. (2)

Si la función objetivo es cóncava y las restricciones también cóncavas se puede afirmar que es un óptimo global.

PAUTA P4

VARIABLES DE DECISION (1p)

$X_{i,k}$ = LITROS DE ADITIVO i FABRICADOS EN LA PLANTA EN UN LAPSO DE 24 HORAS

FUNCION OBJETIVO (2p)

$$\text{MIN} \quad \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N (X_{i,k} \cdot CF_{i,k}) + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J \left[\sum_{i=1}^N (X_{i,k} \cdot C_{ij}) \right] \cdot C$$

S.A //

$$\sum_{i=1}^N X_{i,k} \cdot TF_{i,k} \leq 24 \quad \text{PARA } k \in [1, \dots, K]$$

$$\sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N (X_{i,k} \cdot CO_{i,k,l}) \leq CM_l \quad \text{PARA } l \in [1, \dots, L]$$

$$2 \sum_{k=1}^K X_{1,k} = \sum_{k=1}^K X_{3,k}$$

$$2 \sum_{k=1}^K X_{2,k} = \sum_{k=1}^K X_{5,k}$$

Alejandro Muñoz R